Aufgabe *(Sobolevungleichung)* (4 Punkte)
Sei $1 < p < n$ und $q = np/n - p$. Wir betrachten das Variationsproblem

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \to \min \quad \text{in } \mathcal{C}_{n,p} = \{u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 1\}.$$

Bestimmen Sie die rotationssymmetrischen, positiven Lösungen $u = g(r)$ der zugehörigen Euler-Lagrange Gleichung.

Aufgabe 2 *(Konzentrationen)* (4 Punkte)
Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^n$ die Folge von Abbildungen

$$u_k(x) = \begin{cases} kx & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2k} \\ (1 - k|x|)\, 2kx & \text{für } \frac{1}{2k} \leq |x| \leq \frac{1}{k} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass folgende Konvergenzaussagen als Radonmaße gelten:

$$\mathcal{L}^n \llcorner \det Du_k \to 0 \quad \text{jedoch} \quad \mathcal{L}^n \llcorner |\det Du_k| \to \alpha_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \delta_0.$$

Dabei ist $\alpha_n = \mathcal{L}^n(B_1(0))$ und δ_0 bezeichnet das Diracmaß im Nullpunkt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 6. Februar vor der Vorlesung.